**Министерство науки и высшего образования Российской**

**Федерации**

**Федеральное государственное автономное**

**образовательное учреждение высшего образования**

**«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет информационных технологий и программирования

Прикладная математика

Лабораторная работа №2

Теория игр

**Выполнили студенты группы № M33091**

Фисенко Никита Данилович

Рустамов Марк Самирович

Санкт-Петербург 2023

**Постановка задачи:**

* Реализовать возможность ввода данных из файла в формате JSON, который содержит матрицу игры.
* Упростить платежную матрицу путем анализа доминирующих стратегий.
* Если возможно, найти решение игры в чистых стратегиях. Определить оптимальные стратегии и соответствующую цену игры.
* Если решение в чистых стратегиях найти невозможно, применить симплекс-метод для поиска седловой точки в смешанных стратегиях. Определить смешанные стратегии и соответствующую цену игры.

**Цель работы:**

Упростить платежную матрицу путем анализа доминирующих стратегий, по возможности найти решение игры в чистых стратегиях, иначе применить симплекс-метод, а также осуществить возможность ввода данных в формате JSON.

**Теория:**

***Основные понятия.***

Теория игр – это теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта или неопределённости. При этом конфликт не обязательно должен быть антагонистическим, в качестве конфликта можно рассматривать любое разногласие. Всякая теоретико-игровая модель должна отражать, кто и как конфликтует, а также, кто и в какой форме заинтересован в том или ином исходе конфликта. Действующие в конфликте стороны называются игроками, а решения, которые способны принимать игроки, стратегии.

Рассмотрим матричные игры. Под матричной игрой понимается такая игра двух игроков, при которой каждый игрок имеет конечное число возможных ходов – чистых стратегий. При этом выигрыш одного игрока и проигрыш другого при применении ими определённых чистых стратегий выражается числом. Задачей теории игр является определение оптимальных стратегий игроков. В матричной игре оптимальной для игрока А называется стратегия, которая при многократном повторении игры обеспечивает максимально возможный средний выигрыш, а для игрока В под оптимальной понимается стратегия, обеспечивающая ему минимальный средний проигрыш. При этом предполагается, что противник является по меньшей мере таким же разумным и делает всё для того, чтобы помешать нам добиться своей цели.

***Упрощение игр.***

Если игра m×n не имеет седловой точки, то найти её решение, особенно при больших m и n, трудно. Иногда эту задачу можно упростить, сократив число стратегий, вычёркивая некоторые заведомо невыгодные. Рассмотрим две стратегии первого игрока – i – ю и k – ю. При этом пусть для всех элементов соответствующих строк матрицы выполняются условия: . В этом случае говорят, что i – я стратегия первого игрока доминирует над его j – й стратегией. Если каждое неравенство выполняется как строгое, то говорят, что одна стратегия строго доминирует над другой. В любом случае из двух стратегий первый игрок предпочтет доминирующую, поскольку при использовании доминируемой стратегии его выигрыш по меньшей мере не увеличится.

Аналогично рассмотрим две стратегии второго игрока - j - ю и l – ю, и при этом для элементов соответствующих столбцов матрицы выполняются условия: . Для второго игрока, как известно, более выгодной является стратегия, дающая меньший проигрыш, поэтому говорят, что j - я стратегия доминирует над l - й. Если попарные неравенства являются строгими, то говорят, что одна стратегия строго доминирует над другой.

В результате при наличии доминирующих стратегий часть стратегий можно не рассматривать, что приведет в ряде случаев к значительному упрощению платежной матрицы.

***Чистые стратегии. Нижняя и верхняя границы игры. Седловая точка.***

Рассмотрим матричную игру m×n с платежной матрицей:



Пусть игрок А выбирает некоторую стратегию Аi, тогда в наихудшем случае он получит выигрыш равный . Предвидя эту возможность, игрок А должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный в каждой стратегии выигрыш . Таким образом, . Величина называется нижней ценой игры. Очевидно,  находится в одной из строк матрицы Н, пусть в i0, тогда стратегия  называется максиминной.

Итак, если игрок А будет придерживаться максиминной стратегии, то ему при любом поведении игрока В гарантируется выигрыш, во всяком случае не меньше .

С другой стороны, противник – игрок В, заинтересован в том, чтобы обратить выигрыш игрока А в минимум, поэтому он должен пересмотреть каждую свою стратегию с точки зрения максимального выигрыша игроком А при этой стратегии. Другими словами, при выборе некоторой стратегии Bj он должен исходить из максимального проигрыша в этой стратегии, равного , и найти такую стратегию, при которой этот проигрыш будет наименьшим, то есть не более чем .

Величина  называется верхней ценой игры, а соответствующая ему стратегия  – минимаксной.

Игра с седловой точкой является наиболее простым случаем матричной игры. Игрой с седловой точкой называется игра, у которой совпадают нижняя и верхняя цены игры, то есть выполняется равенство:

При этом  называется ценой игры, элемента  соответствующий равенству, называют седловой точкой.

Простота решения игры с седловой точкой заключается в том, что оптимальные стратегии обоих игроков находятся сразу. Для игрока А это стратегия  для игрока В – . Причём, такое решение обладает свойством устойчивости в том смысле, что если один из игроков применяет свою оптимальную стратегию, то любое отклонение другого игрока от оптимальной стратегии может оказаться не выгодным для него.

***Игры, не содержащие седловой точки. Смешанные стратегии. Применение симплекс-метода.***

Среди конечных игр, имеющих практическое значение, сравнительно редко встречаются игры с седловой точкой. Более типичным является случай, когда нижняя и верхние цены не совпадают, причём .

Установленный факт означает, что если игра одноходовая, то есть партнёры играют один раз, выбирая по одной чистой стратегии, то в расчёте на разумно играющего противника они должны придерживаться принципа минимакса, это гарантирует выигрыш  игроку А и проигрыш  игроку В. Следовательно, при применении минимаксных стратегий величина платежа V ограничена неравенством .

Если же игра повторяется не однократно, то постоянное применение минимаксных стратегий становится не разумным. Например, если игрок В будет уверен в том, что на следующем ходу А применит прежнюю стратегию, то он несомненно выберет стратегию, отвечающую наименьшему в это строке, а не прежнюю.

Таким образом, мы пришли к выводу, что при неоднократном повторении игры обоим игрокам следует менять свои стратегии. Тогда возникает вопрос: а каким образом их менять, чтобы в среднем выигрыш одного и проигрыш другого был аналогично одноходовой игре, ограничиваясь снизу и сверху соответственно?

Для ответа на этот вопрос введём вероятность (относительную частоту) применение игроком А i-й стратегии, и  – вероятность применения j-й стратегии игроком В. Совокупности этих вероятностей определяют векторы, где  и , где . Эти векторы или наборы вероятностей выбора чистых стратегий называются смешанными стратегиями игроков.

Для получения ограничений на средний выигрыш или проигрыш рассмотрим математическое ожидание выигрыша первого игрока .

Если второй игрок В выбрал некоторую смешанную стратегию , то первому игроку, естественно, считать лучшей ту смешанную стратегию , при которой достигается : .

Аналогично, при выборе первым игроком некоторой стратегии  второму игроку следует выбирать стратегию  такую, что .

Ясно, что  зависит от  и  зависит от . Перед каждым игроком, таким образом, возникает задача выбора оптимальной стратегии, под которой для игрока А понимается смешанная стратегия , которая максимизирует математическое ожидание его выигрыша, для игрока В – стратегия , минимизирующая математическое ожидание его проигрыша. Средняя величина выигрыша (математическое ожидание выигрыша) является функцией от смешанных стратегий ,   и называется платежной функцией игры.

Чтобы определить смешанные стратегии и соответствующую цену игры с помощью симплекс-метода, необходимо составить двойственную задачу линейного программирования и решить её:

Изображение выглядит как текст, Шрифт, рукописный текст, снимок экрана

Автоматически созданное описание

**Примечание:**

Код представлен на:

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, линия, Шрифт

Автоматически созданное описаниеИзображение выглядит как текст, линия, Шрифт, снимок экрана

Автоматически созданное описаниеИсходные данные:

Результат:

Изображение выглядит как текст, чек, Шрифт, белый

Автоматически созданное описание

Изображение выглядит как текст, чек, Шрифт, алгебра

Автоматически созданное описание

Реализация:

<https://github.com/russianZAK/applied-mathematics/blob/main/Lab%202%205-sem/lab2.5.ipynb>

**Выводы:**

В ходе работы мы научились упрощать платежные матрицы, разделяя столбцы и строки на доминирующие и доминируемые, научились находить решение в чистых стратегиях с помощью седловой точки, определять нижнюю и верхнюю границы игры, а также находить решение в смешанных стратегиях, применяя симплекс-метод.